Проблем 4. Сегменти

Дато је n сегмената и m тачака на x-оси. За сваку од датих m тачака одредити број сегмената којима она припада. Тачка x припада сегменту $[a, b]$ ако је $a \leq x \leq b$.

Улаз. (Улазни подаци се учитавају са стандардног улаза.) У првом реду стандрадног улаза налазе се два природна броја $n \leq 10^5$ и $m \leq 10^5$ - број сегмената и број тачака, редом. У следећем реду се налазе m бројева раздвојених размаком - координате тачака. У следећих n редова се налазе по два броја раздвојена размаком - лева и десна координата одговарајућег сегмента (лева координата је строго мања од десне). Све координате су природни бројеви не већи од 10^9.

Излаз. (Излазни подаци се исписују на стандардни излаз.) На стандардни излаз за сваку тачку исписати број сегмената којима она припада, сваки број у посебном реду и у редоследу којим су тачке дате на улазу.

Пример 1.

standardni ulaz	standardni izlaz
3 4	2
5 1 8 9	0
6 7	1
4 9	1
2 5	

Решење. Постоји неколико варијанти овог типа проблема. Једно очигледно решење је да за сваку од m тачака проверимо колико сегмената је садржи тако што прођемо кроз све сегменте. Сложеност овог решења је $O(nm)$ и, с обзиром на ограничења, није довољно ефикасно (иако у овом случају узима солидан број поена).

Приметимо да ако за неку тачку (која није ни почетак ни крај неког сегмента) знамо да се лево од ње налази тачно L левих крајева и D десних крајева сегмената (небитно у ком редоследу), тада се посматрана тачка налази у тачно $L - D$ сегмената. Заиста, тих D крајева морају да одговарају неким од L почетака, што значи да се крајеви преосталих $L - D$ почетака налазе десно од посматране тачке, па она припада сваком од тих сегмената. Преостали сегменти не садрже посматрану тачку јер су по претпоставци или лево (њих D) или десно од ње (њих $n - L$).

Користећи ово запажање, долазимо до ефикасног алгоритма. Употреба термина "лево" сугерише сортирање па на почетку сортирамо све леве и десне крајеве сегмената и тражених m тачака (дакле укупно $2n+m$ тачака) према x-координати. Претпоставимо за сада да никоје две тачке немају исту x-координату.

Затим се крећемо с лева на десно у сортираном низу тачака и у сваком тренутку памтимо $BrSegm$ - у колико сегмента се тренутно налазимо. Уколико наиђемо на леви крај неког сегмента, значи да "улазимо" у нови сегмент па повећавамо $BrSegm$ за 1. Уколико наиђемо на десни крај значи да "излазимо" из неког сегмента, па смањујемо $BrSegm$ за 1. Уколико наиђемо на неку од m тачака, знамо да се она налази у $BrSegm$ сегмената и то је решење за ту тачку. После пролаза целог низа, за сваку тачку смо одредили тражени број.

Сложеност овог пролаза је линеарна после сортирања, па уколико користимо неки од бржих алгоритама за сортирње, укупна сложеност је $O((n+m)\log(n+m)) + O(n+m) = O((n+m)\log(n+m))$.

Посебну пажњу треба обратити уколико неколико тачака има исту x-координату. Нпр. ако имамо сегмент $[a, b]$ и тачку a, кључно је да ли у сортираном низу прво иде леви крај или посебна тачка (у другом случају добијамо да се тачка налази у 0 сегмента што није тачно). Слично и за сегмент $[a, b]$ и тачку b. Да би алгоритам био коректан, у случају истих координата, прво треба да иду леви крајеви, затим тачке које нису крајеви сегмената, и на крају десни крајеви. Ово најлакше можемо постићи ако левим крајевима доделимо 1, десним -1 а осталим тачкама 0 па у случају истих координата сортирамо опадајуће по овим вредностима.

Напомена: Уколико се посматрају интервали или полуинтервали уместо сегмента, алгоритам је исти, само се другачије сортирају тачаке које имају исте x-координате. Водити рачуна да за сваку од m тачака треба памтити индекс у почетном низу, због траженог редоследа.

Тестирање. Тестирање решења се вршило над корпусом од 10 тест примера. Вредност сваког примера је 10 поена.

Рб	Опис алгоритма	Сложеност алгоритма	Број поена
01	Свака тачка и сваки сегмент	$O(nm)$	50
02	Сортирање и пролаз кроз низ	$O((n+m)\log(n+m))$	100

Table 1: Очекивани број поена у зависности од алгоритма

Рб	n	m	Опис
01	6	8	Ручно
02	50	50	Сви сегменти имају исти леви крај
03	100	200	Рандом
04	5.000	3.000	Скоро све тачке у свим сегментима
05	8.000	10.000	Сви сегменти дисјунктни
06	60.000	50.000	Сви сегменти угњеждени
07	60.000	80.000	Рандом
08	100.000	100.000	укупно 500 различитих координата
09	100.000	100.000	Рандом
10	100.000	100.000	Класе сегмената се поклапају

Table 2: Вредности улазних параметара тест примера

Аутор:
Никола Милосављевић
Природно математички факултет, Ниш