Проблем 5. Magacin

Добили сте посао магационера у новом магацину кутија! Магацин је огроман и у њему се налази n гомила кутија, у свакој гомили су кутије поређане једна на другу. Међутим, неке гомиле су превисоке а неке прениске, а ви волите ред, па сте решили да прераспоредите неке кутије.

На располагању вам је виљушкар који одједном може да преноси тачно k кутија (ни мање ни више). Према томе, у једном пребацивању можете узети тачно k кутија са неке гомиле (која има бар k кутија) и пребацити их на било коју другу гомилу. Желите да извршите неколико пребацивања тако да на крају добијете n што приближнијих гомила, тј. да **разлика броја кутија на највећој и најмањој гомили буде минимална**. Одредите ту разлику.

Улаз. (Улазни подаци се налазе у датотеци `magacin.in`) У првом реду улазне датотеке налазе се 2 природна броја n и k који представљају, редом, број гомила и капацитет виљушкара ($1 \leq n, k \leq 10^6$). Следећи ред садржи n бројева a_i раздвојених размаком - број кутија на одговарајућим гомилама ($1 \leq a_i \leq 10^9$).

Излаз. (Излазне податке уписати у датотеку `magacin.out`) У првом и јединском реду излазне датотеке исписати минималну могућу разлику између броја кутија на највећој и најмањој гомили после оптималног низа пребацивања.

Пример 1.

magacin.in	magacin.out
5 7 20 3 8 19 29	6

Објашњење. Уколико пребацимо 7 кутија са прве на другу гомилу, 7 кутија са пете на другу и 7 кутија са пете на трећу, добијамо гомиле 13 17 15 19 15 где је разлика између највеће и најмање $19 - 13 = 6$. Ниједан други низ пребацивања не даје мању разлику.

Решење. Назовимо скуп од k кутија - *paket*. Нека је остатак при дељењу броја кутија на i-тој гомили бројем k једнак r_i ($0 \leq r_i < k$). Приметимо да ма колико пакета уклонили или додали i-тој гомили, r_i се неће променити.

Како нам број пребацивања није битан (могуће је одредити и оптималан број пребацивања, то се оставља читаоцу за вежбу), можемо замислити да смо покупили све пакете са свих гомила и оставили их по страни. Тада са стране имамо $S = \lfloor \frac{a_1}{k} \rfloor + \lfloor \frac{a_2}{k} \rfloor + \ldots + \lfloor \frac{a_n}{k} \rfloor$ пакета, а на i-тој гомили је остало r_i кутија. Одредимо како распоредити ових S пакета по гомилама.

Природно се намеће да пакете распоређујемо "по слојевима", тј. да на свакој гомили прво буде по 1 пакет, па по 2 пакета итд. док нам не преостане мање од n пакета за распоређивање (и онда одредити шта даље). Докажимо да је ово заиста оптимално. Претпоставимо да у оптималној подели највећа гомила (i) има бар 2 пакета више него најмања (j). Тада је тражена разлика $|xk + r_i - r_j|$, $x \geq 2$. Пребацивањем једне кутије са гомиле i на гомилу j разлика између ове две гомиле постаје $|(x-2)k + r_i - r_j| < |xk + r_i - r_j|$. Заиста, за $x > 2$ ово је очигледно а за $x = 2$ прва разлика је $|2k + r_i - r_j| > k$ а друга $|r_i - r_j| < k$. Према томе смањили смо разлику па је оптимално решење оно, код ког на неким гомилама има x пакета а на преосталим $x + 1$ пакет.

Приликом распоређивања по слојевима, за последњи слој нам остаје $S \mod n$ пакета и треба одредити којим гомилама их доделити. Нека је A - скуп свих гомила (остатака) којима смо додали пакет више ($|A| = S \mod n$) а B - скуп осталих гомила. Тражена разлика ће бити $k + r_i - r_j$, где је r_i - највећи остатак из A а r_j - најмањи остатак из B. Јасно је да $r_i - r_j$ треба бити што мање, па је оптимално да у скупу A буде најмањих $S \mod n$ остатака. Заиста, уколико постоје $r_a \in A$ и $r_b \in B$ за које је $r_a > r_b$, пребацивањем r_a у B и r_b у A тражена разлика се потенцијално смањује.

После овог разматрања, алгоритам је јасан: сортирамо гомиле на основу остатака по модулу k, доделимо пакете на горе описан начин и тражена разлика је $k + r_x - r_{x+1}$, где је $x = S \mod n$. Уколико користимо *quick sort*, сложеност је $O(n \log n)$, док је сложеност уз употребу *counting sorta* једнака $O(n + k)$.

Тестирање. Тестирање решења се вршило над корпусом од 10 тест примера. Вредност сваког примера је 10 поена. Тест примери су покривали неке специјалне случајеве: гомиле са истим остацима, гомиле са узастопним природним бројевима, тест примери у којима је $S \mod n = 0$ итд. У неким тест примерима је за S потребно користити 64-битне бројеве или стално $\mod$-овати.

Рб	Опис алгоритма	Сложеност алгоритма	Број поена
01	Сортирање остатака квадратним сортом	$O(n^2)$	40
02	Сортирање остатака *Quick sortom*	$O(n \log n)$	90-100
03	Сортирање остатака *Counting sortom*	$O(n + k)$	100

Table 1: Очекивани број поена у зависности од алгоритма

Рб	n	k	Решење
01	8	12	5
02	100	64	0
03	801	10.007	9.989
04	1.000	1.000	995
05	25.000	45	41
06	30.000	543	543
07	80.000	10.333	5.167
08	300.000	3.333	1.111
09	654.321	123.456	82.298
10	1.000.000	1.000.000	199.997

Table 2: Вредности улазних параметара тест примера

Аутор:
Никола Милосављевић
Природно математички факултет, Ниш